

基于最小方差谱估计的循环平稳信号 到达角估计方法

黄知涛, 周一宇, 姜文利

(国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

摘 要: 文章提出了基于最小方差谱估计的多循环频率到达角估计方法. 通过对指数函数进行 Jacobi Anger 展开, 将目标方向矩阵近似分解为两个独立矩阵相乘的形式, 并构造相应的变换矩阵, 将多个不同循环频率处阵列输出信号循环相关函数矩阵进行叠加, 再利用最小方差谱估计方法实现对目标到达角的估计. 新方法克服了已有基于信号循环平稳特性估计方法只利用信号单个循环频率信息的不足. 仿真结果证实了新方法的有效性, 同时也证实该方法确实具有较单循环频率 SG SSF 方法和传统宽带聚焦方法更好的估计性能.

关键词: 循环平稳信号; 到达角估计; Jacobi Anger 展开

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 09-1590-04

Direction of Arrival Estimation Method for Cyclostationary Signals Using the Minimum Variance Spectral Estimate

HUANG Zhi-tao, ZHOU Yi-yu, JIANG Wen-li

(Electronic Science and Engineering, NUDT, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: Suffering from the exploitation of the cyclostationary property at only one cycle frequency, the existing SG SSF algorithm can not reach the best performance. By using the minimum variance spectral estimate method, a new approach exploiting the cyclostationary property at multiple cycle frequencies is discussed in the paper. Firstly, by using the Jacobi Anger expansion, the direction matrix can be divided into two parts. Secondly, the transforming matrix can be formed according to the two parts. Thirdly, the minimum variance spectral estimate method is used to estimate the direction. Simulation results demonstrate the effectiveness and superiority of the new approach over the single cycle SG SSF algorithm and the conventional focusing transform algorithm for wide band signals.

Key words: cyclostationarity signals; direction of arrival estimation; jacobi anger expansion

1 引言

已有的基于信号循环平稳特性的到达角 (Direction of Arrival: DOA) 估计方法, 如 Cyclic MUSIC、Cyclic ESPRIT 还是 SG SSF 算法^[1~8], 都只计算特定循环频率处的循环自相关函数, 然后再构造协方差数据矩阵, 本质上只利用了单个循环频率处信号的循环平稳特征. 然而, 在雷达、通信、声纳、导航等系统中常见的大多数循环平稳信号的循环频率都是不唯一的^[9]. 由于信号循环平稳特征信息利用不充分, 利用单个循环频率信号循环平稳特征的 DOA 估计方法性能不是最优的. 为充分利用信号的循环平稳性, 并且克服算法对单个循环频率的依赖, 有必要考虑同时利用多个循环频率信号信息来进行 DOA 估计.

2 阵列处理模型

设传感器阵列共有 $2M+1$ 个阵元, 各阵元以间距 D 排列

成均匀线阵, 以阵列第 $M+1$ 个阵元为参考阵元; 空间共有 d 个源信号, $s(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_d(t)]$ 为接收信号矢量, $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_{2M+1}(t)]$ 为阵列输出信号矢量, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d\}$ 是空中 d 个目标的方向角. $x(t)$ 中第 i 个分量 $x_i(t)$ 可表示为

$$x_i(t) \triangleq \sum_{k=1}^d s_k(t + (i-1)D \sin(\theta_k)/c) + n_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 2M+1 \quad (1)$$

式中 c 为光速, 且各阵列输出信号中的噪声 $n_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 2M+1$ 是互不相关的零均值高斯白噪声, 与信号 $s_k(t)$ 统计独立.

计算信号 $x_i(t)$ 在循环频率 α 处的循环自相关函数^[9], 有

$$\begin{aligned} R_{x_i}^{\alpha}(\tau) &\triangleq \langle x_i(t + \tau/2) x_i^*(t - \tau/2) e^{-j2\pi\alpha\tau} \rangle_t \\ &= \langle \sum_{k=1}^d s_k(t + \tau/2 - (M+1-i)D \sin\theta_k/c) \sum_{l=1}^d s_l^*(t - \tau/2 - (M+1-i)D \sin\theta_l/c) e^{-j2\pi\alpha\tau} \rangle_t \end{aligned} \quad (2)$$

由于信号 $\{x_i(t), i = 1, 2, \dots, M\}$ 是互不循环相关的, 且设对于循环频率 α , 只有 d_α 个源信号存在循环自相关, 于是有

$$\begin{aligned} R_{x_i}^\alpha(\tau) &= \sum_{k=1}^d \langle s_k(t + \tau/2 - (M+1-i)D\sin\theta_k/c) s_k^* \\ &\quad (t - \tau/2 - (M+1-i)D\sin\theta_k/c) e^{-j2\pi\alpha t} \rangle_t \\ &= \sum_{k=1}^{d_\alpha} R_{s_k}^\alpha(\tau) e^{-j2\pi\alpha(M+1-i)D\sin\theta_k/c} \end{aligned} \quad (3)$$

设循环平稳信号共有 C 个循环频率 $\alpha_i, i = 1, \dots, C$. 令

$$R_{x_i}^\alpha(\tau) = [R_{x_i1}^\alpha(\tau), R_{x_i2}^\alpha(\tau), \dots, R_{x_i2M+1}^\alpha(\tau)]^T \quad (4)$$

$$A(\alpha_i, \Theta) = [a_1(\alpha_i, \theta_1), a_2(\alpha_i, \theta_1), \dots, a_d(\alpha_i, \theta_d)]^T \quad (5)$$

$$R_{s_i}^\alpha(\tau) = [R_{s_i1}^\alpha(\tau), R_{s_i2}^\alpha(\tau), \dots, R_{s_i2M+1}^\alpha(\tau)]^T \quad (6)$$

$$a_k(\alpha_i, \theta_k) = [e^{-j2\pi\alpha_i MD\sin\theta_k/c}, \dots, e^{j2\pi\alpha_i MD\sin\theta_k/c}]^T \quad (7)$$

将式(3)写成矩阵形式, 得到

$$R_{x_i}^\alpha(\tau) = A(\alpha_i, \Theta) R_{s_i}^\alpha(\tau), i = 1, 2, \dots, C \quad (8)$$

对任意循环频率 α_i 构造伪数据矩阵, 定义如下

$$X(\alpha_i) = \begin{bmatrix} R_{x_i1}^\alpha(0) & R_{x_i1}^\alpha(T_s) & \dots & R_{x_i1}^\alpha(LT_s) \\ R_{x_i2}^\alpha(0) & R_{x_i2}^\alpha(T_s) & \dots & R_{x_i2}^\alpha(LT_s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{x_i2M+1}^\alpha(0) & R_{x_i2M+1}^\alpha(T_s) & \dots & R_{x_i2M+1}^\alpha(LT_s) \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, $\tau = 0, T_s, \dots, LT_s$ 是采样间隔. 根据协方差数据矩阵 $X(\alpha_i) X^H(\alpha_i)$, 利用信号子空间拟和算法, 如 MUSIC 或 ESPRIT, 可以估计出信号到达角^[3]. 在文献[3]中, 该方法被称为 SG-SSF 算法, 也可以是 SG MUSIC 或 SG ESPRIT 算法. 其中, SC 表示 Spectral Correlation, SSF 表示 Signal Subspace Fitting. 显然, SG-SSF 算法只计算特定循环频率 α_i 处的循环相关函数, 算法性能与所选择的循环频率有关. 由于算法只利用了单个循环频率的信号谱相关特征, 文章也将此类方法统称为单循环频率 SG-SSF 算法.

3 基于 Jacobi Anger 展开的目标方向矩阵分解

根据 Jacobi Anger 展开^[10, 11], 指数函数可进行如下分解

$$\begin{aligned} e^{j\alpha \sin\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) j_n(\alpha) P_n(\sin\theta) \\ &= \sum_{n=0}^N j^n (2n+1) j_n(\alpha) P_n(\sin\theta) + e(N) \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $e(N)$ 是截断误差, $j_n(\cdot)$ 是球形 Bessel 函数, $P_n(\cdot)$ 是 Legendre 函数, 且

$$j_n(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} J_{n+0.5}(\alpha) \quad (11)$$

$$P_n(\sin\theta) = \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \frac{(2l-2m)!}{2^m l! (l-m)! (l-2m)!} (\sin\theta)^{l-2m} \quad (12)$$

式中, $J_n(\cdot)$ 是第一类 Bessel 函数, $[\cdot]$ 为取整运算符.

图 1 显示, 当满足 $N \geq \alpha + 4$ 时, 式(10)取前 $N+1$ 项后的截断误差 $e(N)$ 可忽略. 在阵列方向矢量中有 $x = 2\pi MD/c$, 于是 N 的取值应满足

$$N \geq \max(\alpha, 2\pi\alpha MD/c) + 4 \quad (13)$$

如果式(10)中的截断误差可以忽略, 则阵列方向矢量中的第 k 个分量可进行写成下面的形式 $a_k(\alpha_i, \theta_k) =$

$$J(\alpha_i) \begin{bmatrix} P_0(\sin\theta_k) \\ \vdots \\ P_N(\sin\theta_k) \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中

$$J(\alpha_i) \triangleq \begin{bmatrix} j^0(2\cdot 0+1)j_0(-\alpha_i \cdot 2\pi MD/c) & \dots & j^0(2\cdot N+1)j_0(-\alpha_i \cdot 2\pi MD/c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j^0(2\cdot 0+1)j_0(\alpha_i \cdot 2\pi MD/c) & \dots & j^0(2\cdot N+1)j_0(\alpha_i \cdot 2\pi MD/c) \end{bmatrix} \quad (15)$$

将式(7)、(14)代入到式(5), 阵列方向矩阵可等价

$$A(\alpha_i, \Theta) = J(\alpha_i) P(\Theta) \quad (16)$$

其中

$$P(\Theta) = \begin{bmatrix} P_0(\sin\theta_1) & \dots & P_0(\sin\theta_d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_N(\sin\theta_1) & \dots & P_N(\sin\theta_d) \end{bmatrix} \quad (17)$$

4 基于最小方差谱估计的多循环频率到达角估计方法

若令

$$G(\alpha_i) \triangleq [J^H(\alpha_i) J(\alpha_i)]^{-1} J^H(\alpha_i), i = 1, \dots, C \quad (18)$$

将上式左右两边右乘 $A(\alpha_i, \Theta)$, 得到

$$G(\alpha_i) A(\alpha_i, \Theta) = [J^H(\alpha_i) J(\alpha_i)]^{-1} J^H(\alpha_i) A(\alpha_i, \Theta) \quad (19)$$

将式(16)代入上式有

$$G(\alpha_i) A(\alpha_i, \Theta) = P(\Theta), i = 1, \dots, C \quad (20)$$

于是, 用矩阵 $G(\alpha_i)$ 左乘式(8)等号左右两边, 得到

$$\begin{aligned} G(\alpha_i) R_{x_i}^\alpha(\tau) &= G(\alpha_i) A(\alpha_i, \Theta) R_{s_i}^\alpha(\tau) \\ &= P(\Theta) R_{s_i}^\alpha(\tau), i = 1, 2, \dots, C \end{aligned} \quad (21)$$

根据式(21), 构造如下形式的协方差数据矩阵 R

$$R = \sum_{i=1}^K G(\alpha_i) E\left\{R_{s_i}^\alpha(\tau) [R_{s_i}^\alpha(\tau)]^H\right\} G^H(\alpha_i) \quad (22)$$

最小方差谱估计特征量^[10]为

$$Z(\theta) = \frac{1}{[P_0(\sin\theta) \dots P_N(\sin\theta)] R^{-1} \begin{bmatrix} P_0(\sin\theta) \\ \vdots \\ P_N(\sin\theta) \end{bmatrix}} \quad (23)$$

通过搜索 $Z(\theta)$ 最大谱峰位置即可得到源信号到达角的估计. 文章称该方法为基于最小方差谱估计的多循环频率 SG-SSF 算法.

其中, 通过式(22)计算得到的协方差矩阵 R 是 $N+1 \times N+1$ 维的. 要使矩阵 R 满秩, 必须满足如下条件^[10]

$$N+1 \leq 2M+1 \Rightarrow N \leq 2M \quad (24)$$

比较式(13)、(24)知道, N 必须满足如下条件

$$\pi M \frac{\alpha}{f_0} + 4 \leq N \leq 2M \quad (25)$$

实际上,在许多情况下式(25)左右两边是不能同时成立的。比如对于常规处理过程^[10]有 $\alpha = f_0$, 此时式(25)左边为 $\pi M + 3$, 大于右边的 $2M$, 左右两边不能同时成立; 而当取两倍中心频率作为循环频率时, 即当 $\alpha = 2f_0$ 时, 式(25)左边为 $2\pi M + 3$, 大于右边的 $2M$, 左右两边也不能同时成立。这要求对原算法进行一定的修改。

式(13)、(24)分别是在逼近精度及可逆性要求下得到的 N 的取值约束, 在实际中这两个条件都必须满足才能使算法能正确估计出信号到达角, 并且具有较高的估计精度。式(25)不能成立的问题可通过下面的方法解决: 首先取满足式(13)所示条件的 N , 并根据式(22)计算得到协方差矩阵 R_{N+1} ; 然后, 对协方差矩阵 R_{N+1} 进行重构, 得到协方差矩阵 R_{N_1+1} , 其中, N_1 满足式(24)的条件; 最后, 由数据矩阵 R_{N_1+1} 根据式(23)估计信号到达角 θ 。通过增加一步重构处理, 就能解决式(25)不能成立的问题。下面具体说明如何由矩阵 R_{N+1} 重构得到矩阵 R_{N_1+1} 。

选择满足式(13)条件的 N , 根据式(22)计算得到协方差矩阵 R_{N+1} , 并对该矩阵进行特征值分解, 得到如下形式的表示

$$R_{N+1} = U_{N+1} \Sigma_{N+1} V_{N+1} \quad (26)$$

其中, Σ_{N+1} 为特征值矩阵, U_{N+1} 、 V_{N+1} 分别对应左、右特征向量组成的矩阵, 且

$$\Sigma_{N+1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N+1}) \quad (27)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N+1}$ 为协方差矩阵 R_{N+1} 的 $N+1$ 个特征值, 且假定已经按降序排列。

由于 N 大于 $2M+1$, 因此协方差矩阵 R_{N+1} 是秩为 $2M+1$ 的 $(N+1) \times (N+1)$ 维非满秩矩阵。这意味着特征值 ($\lambda_{2M+2}, \dots, \lambda_{N+1}$) 均为零, 或者说与特征值 ($\lambda_1, \dots, \lambda_{2M+1}$) 相比是非常小的数。定义重构矩阵 R_{N_1+1} 如下

$$R_{N_1+1} \triangleq U_{N_1+1} \Sigma_{N_1+1} V_{N_1+1} \quad (28)$$

其中, U_{N_1+1} 、 V_{N_1+1} 分别是由矩阵 U_{N+1} 、 V_{N+1} 前 (N_1+1) 行和 (N_1+1) 列元素组成的新矩阵, 且

$$\Sigma_{N_1+1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_1+1}) \quad (29)$$

假设空间源信号个数为 L , 当 N_1 的选择满足

$$L \leq N_1 \leq 2M+1 \quad (30)$$

时, 矩阵 R_{N_1+1} 包含了空间源信号到达角的所有信息, 对该满秩矩阵根据式(23)即可估计出空间源信号到达角 θ 。

5 仿真分析

仿真中设定阵元间距 $D = \lambda/2 = c/f_0$, c 为光速, $f_0 = 90\text{MHz}$ 为信号中心频率, 采样频率 $F_s = 60\text{MHz}$ ($= 1/T_s$)。信号观测时间长度为 $4096T_s$, 阵元数为 15 (对应 $M = 7$)。仿真中假设信号循环频率都是已知的, 且各阵列输出信号中的噪声是互不相关的高斯白噪声。

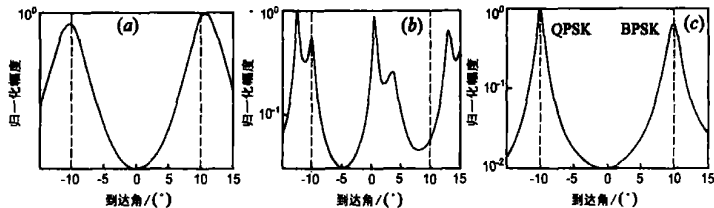


图2 满足不同约束条件时的最小方差谱估计结果, (a) $N=11, N_1=11$, 式(13)不满足, 式(24)满足; (b) $N=20, N_1=20$, 式(13)满足, 式(24)不满足; (c) $N=20, N_1=11$, 式(13)、(24)都满足

Test1: 算法有效性测试

仿真中目标信号为二相编码(BPSK)信号和四相编码(QPSK)信号, 其波特率都为 18.75MHz , 对应的码片宽度 $T_c = 0.053\mu\text{s}$, 信噪比分别为 5dB 和 7dB , 信号入射角分别为 10° 和 -10° 。仿真所用方法为三循环频率 SG-SSF 算法, 三个循环频率分别为 $1/T_c, 2/T_c$ 和 $3/T_c$ 。

图2给出了满足不同约束条件时的 DOA 估计结果。仿真结果说明, 只有在同时满足式(13)、(24)给出的条件时才能正确估计出源信号到达角, 如图2(c)。否则, 若只满足式(24), 则由于 Jacobian 展开误差较大, 会影响算法的估计精度, 如图2(a); 若只满足式(13), 则由于矩阵不可逆, 算法根本无法正确估计源信号到达角, 如图2(b)。

Test2: 精度测试

该仿真主要用来比较基于最小方差谱估计的多循环频率 SG-SSF 方法与已有单循环频率 SG-SSF 方法及基于聚焦变换的宽带高分辨谱估计方法^[12]三者的估计性能。仿真中目标信号为二相编码信号(BPSK 信号), 其波特率为 18.75MHz , 对应的码片宽度 $T_c =$

$0.053\mu\text{s}$, 信号入射角为 10° 。Monte Carlo 仿真模拟次数为 500。图3中“cycle = $1/T_c$ ”表示循环频率为 $1/T_c$ 的单循环频率 SG-SSF 算法; “cycle = $1/T_c + 2/T_c$ ”表示循环频率为 $1/T_c$ 和 $2/T_c$ 的双循环频率 SG-SSF 算法, 参考循环频率为 $1/T_c$; “cycle = $1/T_c + 2/T_c + 3/T_c$ ”表示循环频率为 $1/T_c, 2/T_c$ 和 $3/T_c$ 的三循环频率 SG-SSF 算法, 参考循环频率为 $1/T_c$ 。图中虚线为传统的宽带聚焦变换算法估计精度曲线。

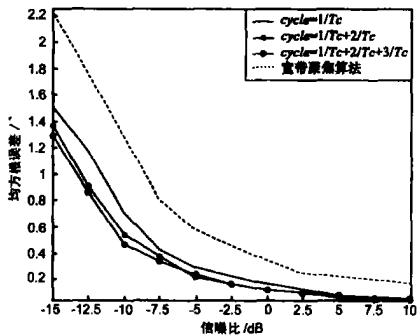


图3 单/多循环频率 SG-SSF 算法及宽带聚焦算法性能比较

由图3所示的仿真结果可看出, 与单循环频率 SG-SSF 算法和宽带聚焦算法相比, 三循环频率 SG-SSF 算法能较大幅度地改善角度估计精度, 特别是在 $\text{SNR} < 0\text{dB}$ 时。

文章研究了基于最小方差谱估计的多循环频率 SG-SSF 到达角估计方法, 通过对指数函数进行 Jacobian 展开, 将

6 结论

文章研究了基于最小方差谱估计的多循环频率 SG-SSF 到达角估计方法, 通过对指数函数进行 Jacobian 展开, 将

目标方向矩阵近似分解为两个独立矩阵相乘的形式, 并构造相应的变换矩阵, 将多个不同循环频率处阵列输出信号循环相关函数矩阵进行叠加, 再利用最小方差谱估计方法实现对目标到达角的估计. 仿真结果证实了新方法的有效性, 同时也证实该方法确实具有较单循环频率 SC-SSF 方法和传统宽带聚焦方法更好的估计性能.

参考文献:

- [1] W A Gardner. Simplification of MUSIC and ESPRIT by exploitation of cyclostationarity[J]. Proc IEEE, 1988, 76(7): 845- 847.
- [2] S V Schell, W A Gardner. Cyclic MUSIC algorithms for signal selective direction finding[A]. Proc ICASSP 89 Conf[C]. Scotland: Glasgow, May 1989. 2278- 2281.
- [3] G H Xu, T Kailath. Direction of arrival estimation via exploitation of cyclostationarity: a combination of temporal and spatial processing[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1992, 40(7): 1775- 1785.
- [4] G H Xu, et al. Array signal processing via exploitation of spectral correlation: A combination of temporal and spatial processing[A]. Proc 23rd Asilomar Conf. Signals, Syst, Comput[C]. Pacific Grove, CA, 1989. 945- 949.
- [5] Y T Lee, et al. Direction finding methods for cyclostationary signals in the presence of coherent sources[J]. IEEE Trans Antennas and Propagation, 2001, 49(12): 1821- 1826.
- [6] S Shamsunder. Array and multichannel signal processing using higher order and cyclic statistics[D]. Virginia: University of Virginia, 1994. 50- 100.
- [7] 黄知涛, 周一宇, 姜文利. 基于循环平稳特性的源信号到达角估计方法[J]. 电子学报, 2002, 30(3): 372- 375.
Huang Zhitao, Zhou Yiyu, Jiang Wenli. Direction of arrival Estimation of signal sources exploiting cyclostationarity property[J]. ACTA ELECTRONICA SINICA, 2002, 30(3): 372- 375. (Chinese Source)
- [8] 黄知涛, 王炜华, 姜文利, 周一宇. 一种基于循环互相关的非相干源信号方向估计方法[J]. 通信学报, 2003, 24(2): 108- 113.
Huang Zhitao, Wang Weihua, Jiang Wenli, Zhou Yiyu. A cyclic cross-correlation based direction of arrival estimation approach[J]. Journal of China Institute of Communications, 2003, 24(2): 108- 113. (Chinese Source)
- [9] W A Gardner. Exploiting spectral redundancy in cyclostationary signals[J]. IEEE ASSP Magazine, 1991, 8(2): 14- 36.
- [10] T D Abhayapala, H Bhatta. Coherent broadband source localization by modal space processing[C]. 10th International Conference on Telecommunications[C]. French Polynesia: Tahiti, 2003. 100- 105.
- [11] R B Ghanem, C Frappier. Spherical Bessel functions and explicit quadrature formula[J]. Mathematics of Computation, 1997, 66(1): 289- 296.
- [12] H Wang, M Kaven. Coherent signal subspace processing for the detection and estimation of angles of arrival of multiple wide band sources[J]. IEEE Trans ASSP 33, 1985, 33(4): 823- 831.

作者简介:



黄知涛 男, 1976 年 9 月出生于湖北荆州, 博士, 副教授, 在国内外知名学术期刊发表论文 40 余篇, 研究方向为: 循环平稳信号处理、雷达信号/ 数据处理及无源探测、定位理论与技术等. E-mail: talcen@yahoo.com.cn.

周一宇 男, 1948 年 10 月出生于上海, 博士, 教授, 博士生导师, 电子学会电子对抗分会委员, 航空学会电子分会雷达与制导专业委员会委员, 出版专著两部, 发表论文 60 余篇, 重点研究方向为: 综合电子战系统理论、无源定位理论与技术、雷达数据处理、电子信息系统仿真等. E-mail: dr406@nudan.edu.cn.